第 14 章　剛体の回転運動

§14.1　固定軸まわりの剛体の回転運動

例 1．実体振り子の運動

質点の力学で説明した振り子の問題では，おもりは質点として扱い，その大きさは考えなかった．実際の振り子はおもりに大きさがあり．支点とおもりをつなく棒や糸にも質量がある．一般の剛体でも，その中の一点を固定軸にして振り子のように振らせることができる．このような大きさを持つ物体による振り子を実体振り子 (physical pendulum) と呼ぶ。図 14.1 のような長さ l の軽い棒でつながれた質量 M で半径 a の球の実体振り子の慣性モーメントは平行軸の定理より球自身の慣性モーメント $(2/5)Ma^2$ で，球の中心が回転軸から $a+l$ 離れていることにより

$$I = \frac{2}{5}Ma^2 + M(a+l)^2. \tag{14.1}$$

重力は重心の位置に Mg の力がはたらくとしてよい．力のモーメントは

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = ((l+a)\sin\theta, -(l+a)\cos\theta, 0)\times(0, -Mg, 0) = (0, 0, -Mg(a+l)\sin\theta) \tag{14.2}$$

となる．したがって，回転の運動方程式は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg(l+a)\sin\theta. \tag{14.3}$$

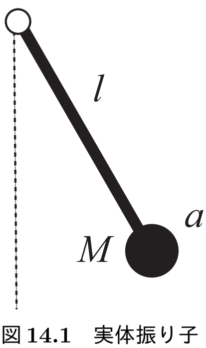


図 14.1　実体振り子

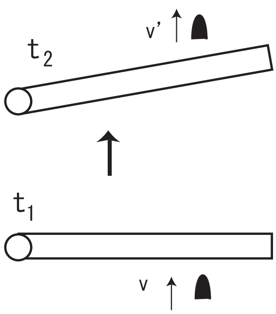


図 **14.2**　弾と回転木戸との衝突．$t_1 < t_2$.

角度 θ が小さいときは

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg(l+a)\theta \tag{14.4}$$

と近似でき，振動数 $\omega = \sqrt{g(l+a)/\{(a+l)^2 + (2/5)a^2\}}$ の単振動をすることが分かる．単振り子の場合は $a = 0$，$I = Ml^2$ なので $\omega = \sqrt{g/l}$ となる．

例 2．物体の衝突による剛体回転

図 14.2 のように，質量 m のピストルの弾が回転木戸に当たり，その衝撃で回転木戸が回転を始める問題を考える．衝突前のピストルの速度を v，回転木戸の慣性モーメントを I，ピストルの弾があたる位置を a とする．弾は衝突後，速度 v' で突き抜けるとする．衝突後の回転木戸の回転角速度 ω を求める．弾が当たった瞬間，撃力 F が回転木戸にはたらく．力のモーメントは Fa でピストルの弾には反作用として $-F$ がかかる．したがって

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fa, \tag{14.5}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -F. \tag{14.6}$$

式 (14.5) と式 (14.6)$\times a$ の和より

$$\frac{d(I\omega + mav)}{dt} = 0. \tag{14.7}$$

これは全角運動量 $I\omega + mav$ の保存則を表している．この場合の角運動量保存則は運動量保存則と同様，作用反作用の法則に由来する．衝突前の全角運動量は mav で，衝突後は $I\omega + mav'$ なので，回転角速度は

$$\omega = \frac{ma(v-v')}{I} \tag{14.8}$$

□　フィギュアスケートのスピン

下図のように，フィギュアスケートのスピンを考える．腕を伸ばして回転している状態から腕を縮めると回転速度が増す．実際の人の慣性モーメントの計算は簡単ではないが，ここでは簡略化して，質量 M，半径 a，高さ h の円柱に，長さ l，質量 m の棒が 2 本ついたものとして考えよう．円柱が胴体で棒が腕を表す．腕を伸ばした状態の慣性モーメントを I_1，角速度を ω_1，腕を縮めたときの慣性モーメントを I_2，角速度を ω_2 とする．氷面とのまさつの効果などは無視して，角運動量保存則が成り立つと仮定すると $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$．したがって

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2} \tag{14.9}$$

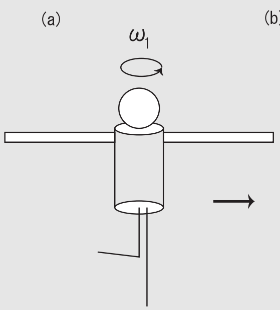
の関係が成立する．腕を水平に伸ばした時の慣性モーメントは円柱の慣性モーメント $(1/2)Ma^2$ と 2 本の腕の慣性モーメントの和となる．棒の重心は回転軸から $(a + l/2)$ 離れているので，平行軸の定理から棒の慣性モーメントは $(1/12)ml^2 + m(a + l/2)^2$ となる．腕を縮めたときの腕の慣性モーメントは無視できると仮定する．これらの仮定の下で，腕を伸ばしたときと，縮めたときの慣性モーメントは

$$I_1 = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{6}ml^2 + 2m(a + l/2)^2,\quad I_2 = \frac{1}{2}Ma^2 \tag{14.10}$$

となる．たとえば，M として 50kg，$a = 0.1\mathrm{m}$，$m = 2\mathrm{kg}$，$l = 0.8\mathrm{m}$ とすると，

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{(1/2)Ma^2 + (1/6)ml^2 + 2m(a + l/2)^2}{(1/2)Ma^2} \approx 5.9. \tag{14.11}$$

腕の重さはそれほど大きくないが，回転軸からの距離が大きいので慣性モーメントへの寄与が大きい．そのため回転速度は約 5.9 倍も速くなる．



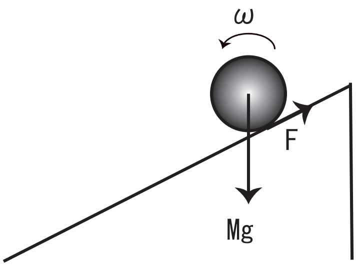


図 14.3　斜面を転がる球

§14.2　転がり運動

ボールが地面を転がるとき，回転とともに重心の位置が移動する．このように実際の剛体の運動では回転運動と並進運動の両方を考える必要がある．回転軸の方向を z 方向で一定とする．

多数の質点系の運動は重心運動とその周りの運動にうまく分解できる．剛体の転がり運動でも，重心の並進運動の運動方程式と，重心の周りの回転の運動方程式を考えればよい．多数の質点系の重心の運動方程式は、各質点にかかる力の和となるので

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{14.12}$$

は，剛体の重心の運動方程式になる．剛体の重心のまわりの回転の運動方程式は次の式になる．

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum(\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i)_z. \tag{14.13}$$

例．斜面を転がり落ちる剛体

水平から θ 傾いた斜面を，半径 a，質量 M の球が転がり落ちる問題を考える．図 14.3 のように物体は斜面から垂直抗力と摩擦力 F を受ける．重心の運動方程式と回転の運動方程式は

$$M\frac{dV}{dt} = Mg\sin\theta - F, \tag{14.14}$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = Fa. \tag{14.15}$$

斜面と直接接触している点の斜面に対する速度は，斜面の下方向への重心の速度 V と，球の中心の周りの回転のために生じる斜面の上向きの $a\omega$ の速度の和

なので，$V - a\omega$ となる．ここではたらいている摩擦力 F は静止摩擦力で，この接触点の速度を 0 にする働きを持っている．したがって，F が最大静止摩擦力よりも小さいときは，斜面と球の接触点の間にすべりはなくなり，

$$V = a\omega \tag{14.16}$$

が成り立つ．

式 (14.16) を用いると $\omega = V/a$ となり，この関係式を式 (14.15) に代入し，式の両辺を a で割ると

$$\frac{I}{a^2}\frac{dV}{dt} = F$$

となる．この式と式 (14.14) の和を取ると，

$$(M + \frac{I}{a^2})\frac{dV}{dt} = Mg\sin\theta. \tag{14.17}$$

この式は斜面を転がり落ちる加速度が $g\sin\theta/(1 + I/Ma^2) = 5g\sin\theta/7$ となることを表している．なめらかな斜面を落下する質点の加速度 $g\sin\theta$ より小さくなる．