

## 第 15 章 コマと歳差運動

### §15.1 コマの歳差運動

高速回転しているコマの軸が少し傾くと、傾き角を一定に保ちながら、軸の上端が水平円運動を示すことがある。この首振り運動（みそすり運動）を歳差運動 (precession motion) とよぶ。歳差運動を行う場合、回転軸の方向と角運動量の方向は厳密には一致しないが、高速回転している場合はその方向はほぼ一致するので、角運動量の時間変化を調べれば歳差運動の様子が分かる。この節ではこの角運動量の時間変化を調べる方法で歳差運動を議論する。より厳密なコマの運動は最後の節で述べる。

コマは通常、軸の周りで軸対称である。図 15.1 のように、質量  $M$ 、軸の周りの慣性モーメントが  $I$  のコマが、軸を傾けて角速度  $\omega$  で回転しているとす。コマの軸の下端は動かないとする。このコマの下端を原点として考える。軸が傾いていると、重心  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  にはたらく重力により力のモーメントが生じる。

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g} = (-Y Mg, X Mg, 0). \quad (15.1)$$

角運動量を  $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$  とすると、回転の運動方程式は

$$\frac{dL_x}{dt} = -Y Mg, \quad \frac{dL_y}{dt} = X Mg, \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad (15.2)$$

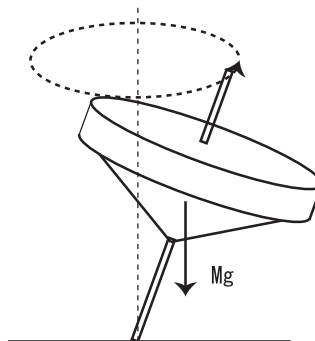


図 15.1 コマの歳差運動

## 第15章 コマと歳差運動

となる．角運動量の大きさは  $I\omega$  で，その方向は重心方向と考えられるので

$$\mathbf{L} = I\omega \frac{\mathbf{R}}{R} = \left( I\omega \frac{X}{R}, I\omega \frac{Y}{R}, I\omega \frac{Z}{R} \right) \quad (15.3)$$

と表現できる． $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  はコマの下端と重心の距離である． $dL_z/dt = 0$  なので， $Z$  は一定となる．したがって

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{RMg}{I\omega} Y, \quad (15.4)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{RMg}{I\omega} X \quad (15.5)$$

が成り立つ．式 (15.4) を 1 回微分して，式 (15.5) を代入すると

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\left( \frac{RMg}{I\omega} \right)^2 X \quad (15.6)$$

が得られる．この方程式は単振動の式と等価な式であり，解は次式で与えられる．

$$X = A \cos(\Omega t). \quad (15.7)$$

さらに，式 (15.4) に代入することで、解

$$Y = A \sin(\Omega t) \quad (15.8)$$

が得られる．この式はコマの重心が角振動数

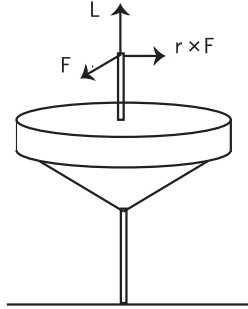
$$\Omega = \frac{RMg}{I\omega} \quad (15.9)$$

で水平面内を回転運動を表している．この運動が歳差運動である． $\omega$  が大きいほど，すなわちコマが高速で回転するほど，歳差運動の周期は長くなる．歳差運動の周期は軸の傾き角に依存しない．

## §15.2 ジャイロ効果

コマを傾けると歳差運動を始める．図 15.2 のように，鉛直に立っているコマの回転軸を傾けるために，コマの軸の上端に  $x$  方向に  $F\tau$  の力積を加える．ただし，コマの慣性モーメントを  $I$ ，回転速度を  $\omega$ ，軸の上端と下端の長さは  $l$ ，重心の位置からコマの下端までの長さを  $R$  とする．力のモーメント  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  は

## §15.2 ジャイロ効果

図 15.2  $x$  方向の力積により  $y$  方向にコマの軸が傾く

$r$  に垂直，すなわち  $L$  に垂直となる．また，力のモーメントは，力の方向にも垂直なので  $y$  方向になる．この撃力による力のモーメントのため，角運動量の  $y$  成分は 0 から  $lF\tau$  に変化する． $L_y = lF\tau$  で，もとの鉛直方向 ( $z$  方向) の角運動量は  $L_z = I\omega$  なので，コマは  $y$  方向に角度

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{lF\tau}{I\omega} \right) \simeq \frac{lF\tau}{I\omega} \quad (15.10)$$

だけ傾く．直観と異なり， $x$  方向に力を加えると，コマは  $y$  方向に傾く．その後は，振動数  $\Omega = RMg/(I\omega)$  の歳差運動を行う．このとき，回転速度  $\omega$  が大きいほど傾き角が小さい．これは高速で回転する大きな慣性モーメントをもつ物体は  $I\omega$  が大きいため，回転軸の方向は変化しにくいことを示している．すなわち，高速回転している物体は力を加えても倒れにくく，さらにそのまま倒れる代わりに歳差運動を始める．高速回転している物体はその回転状態が安定に維持される傾向にある．この効果をジャイロ効果と呼ぶ．

ジャイロコンパスは，この高速回転するコマの回転軸の方向が保持される性質を利用して，常に北の方位を指すように組み立てられた方位測定機である．鋼鉄製の船舶では磁気コンパスは誤差を生じやすいので，GPS がなかった時代に，航海で磁気コンパスの代わりに用いられた．

## 第15章 コマと歳差運動

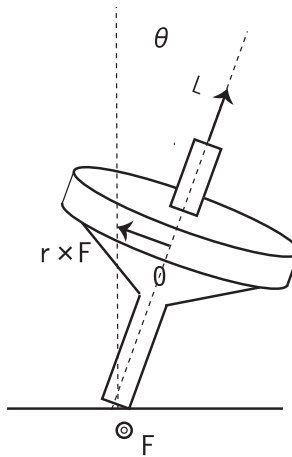


図 15.3 起き上がりコマ

## §15.3 起き上がりコマ

コマはその他にも意外な動きを示すことがある。しかし、一般のコマの運動を解析することはかなり難しい問題である。この節では重力に逆らって起き上がるコマを角運動量の方程式を使って議論する。

回転軸の太いコマを反時計回りに回転させる。このとき角運動量ベクトルは回転軸の方向を向く。太いコマでは回転軸の下端も円運動する。解析を簡単にするために重心の近くの軸上にある点  $O$  が固定されているとする。  $O$  から見ると、垂直抗力の効果が重力の効果よりも大きい。重力の効果を無視すると、垂直抗力による力のモーメント  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_n$  は紙面の奥行き方向を向くので、  $d\mathbf{L}/dt$  もその方向を向く。その結果、角運動量すなわち回転軸も紙面奥行き方向に回転を始める。太いコマの場合も下端が固定されたコマと同じような歳差運動を示す。

一方、回転は反時計回りで軸が図 15.3 のように右に傾いていると、動摩擦力は紙面手前方向にはたらく。動摩擦による力のモーメント  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_t$  は  $x$  の負の方向、すなわちコマの軸を立てる方向にはたらく。この力のモーメントにより、回転軸は重心が高くなる方向に動き、最終的には直立するようになる。このようなコマを起き上がりコマという。ふつうの物体は重心の位置が低くなる方向に動くが、高速回転するコマは逆に重心の位置が高くなる方向に動く。

## §15.3 起き上がりゴマ

## □ 逆立ちゴマと回転卵

図 15.4(a) のような底の部分が丸いコマも軸を上にして高速で回すと、次第に重心が高い方向に動き、最後に逆立ちして回転するようになる。このコマを逆立ちゴマとよぶ。

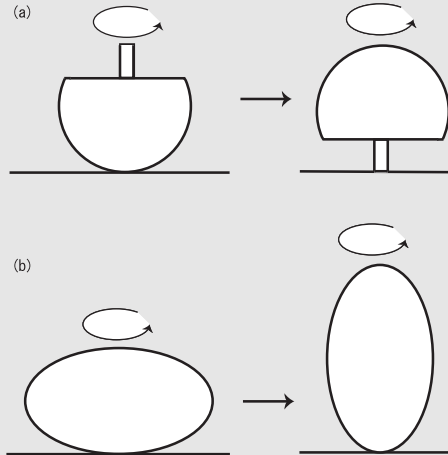


図 15.4 (a) 逆立ちゴマ (b) ゆで卵の立ち上がり

似たような現象は他にも見られる。図 15.4(b) のように、横向きのゆで卵をテーブルの上で高速で回転させると次第に立ち上がる。この現象は回転する卵のパラドックスとして関心を集めてきた。(生卵の場合は、中身が液体のため回転は減衰しやすく、高速で回転させることが困難である。) コマが起き上がったり、卵が起き上がると、重心は上に移動する。回転エネルギーと位置エネルギーの和は摩擦により少しずつ減少しているが、回転エネルギーをより大きく減少させて位置エネルギーを上げていると解釈できる。近年、キース・モファットと下村裕は後の節で説明するオイラー方程式に基づいて、この卵の立ち上がり現象をより正確に解析した。(Nature **416**, 385(2002)) その解析によると、摩擦力のために全エネルギーは保存しないが、高速回転条件下では重心の高さ  $h$  と鉛直軸まわりの回転角速度  $\omega$  の積が初期値で決まる保存量になる。このため、摩擦により回転角速度  $\omega$  が小さくなると、重心の高さ  $h$  が上がることになる。