

第5章 減衰振動

§5.1 減衰振動

現実のバネや振り子は、前節でみた調和振動の解のように永遠に振動をくり返すことはなく、振幅はゆっくり減少し、最後には止まる。この減衰振動 (damped oscillation) を記述するために、バネ定数 k のバネにつながれた物体に $-2hv$ の粘性抵抗がはたらく状況を考える。すなわち

$$F = -kx - 2hv \quad (5.1)$$

ニュートンの法則、フックの法則、粘性抵抗の式を組み合わせることによって、質量 m の物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2h \frac{dx}{dt} \quad (5.2)$$

両辺を m で割り右边を左辺に移項すると

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.3)$$

ここで $\gamma \equiv h/m$, $\omega_0^2 \equiv k/m$. 以下ではこの微分方程式 (5.3) の解を論じる.

5.1.1 変数変換を使った解法

微分方程式 (5.3) において解を $x = e^{-\gamma t} f(t)$ とおいて代入すると

$$\left(\ddot{f} - 2\gamma\dot{f} + \gamma^2 f + 2\gamma(\dot{f} - \gamma f) + \omega_0^2 f \right) e^{-\gamma t} = 0 \quad (5.4)$$

この結果 \dot{f} が消えて単振動の式と似た式が得られる.

$$\ddot{f} + (\omega_0^2 - \gamma^2) f = 0 \quad (5.5)$$

この式の解を場合に分けて考える.

1. 減衰振動 (damped oscillation)

第5章 減衰振動

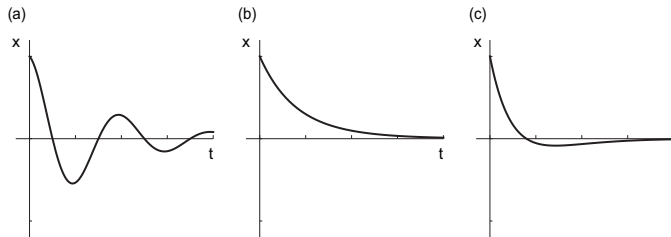


図 5.1 減衰振動. (a) 減衰振動. (b) 過減衰. (c) 臨界減衰.

粘性抵抗が小さく $\gamma < \omega_0$ を満たす場合は新たに $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ という量を定義すれば, f の従う式 (5.5) は単振動の式 (??) と同じ

$$\ddot{f} + \omega_1^2 f = 0 \quad (5.6)$$

になるので解は $f = a \cos(\omega_1 t + \delta)$ で与えられる. したがってもとの解は

$$x(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta) \quad (5.7)$$

振動の振幅は緩和時間 $1/\gamma$ で指数関数的 ($e^{-\gamma t}$) に減少する. 結果として, 振動数 $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ は減衰がない場合の振動数 ω_0 より減少する. したがって周期 $T = 2\pi/\omega_1$ は長くなる.

2. 過減衰 (over-damping)

粘性抵抗が大きく $\omega_0 < \gamma$ の場合は, f の従う式 (5.5) は

$$\ddot{f} - \sigma^2 f = 0 \quad (5.8)$$

となる. ここで $\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. $f = e^{\sigma t}$ も $f = e^{-\sigma t}$ もこの方程式を満たすため, 一般解は $f = a_+ e^{\sigma t} + a_- e^{-\sigma t}$ で与えられる. したがってもとの解は

$$x(t) = a_+ e^{-(\gamma - \sigma)t} + a_- e^{-(\gamma + \sigma)t} \quad (5.9)$$

となり, 異なる緩和時間 $1/(\gamma - \sigma)$ と $1/(\gamma + \sigma)$ で 0 に近づく 2 つの指数関数の和になる. 第 2 項の方が速く減衰するので, 時間が経過すると第 1 項が支配する. このような運動を過減衰という. 空気中で振動をする振り子を水中にいれると振動せずに減衰することがあるが, この解はそのような状態を表している.

§5.2 指数関数を使った解法

3. 臨界減衰 (critical damping)

減衰振動と過減衰のちょうど境目, $\gamma = \omega_0$ の場合は, f の従う式 (5.5) は

$$\ddot{f} = 0 \quad (5.10)$$

になるので, 解は $f = at + b$ となる. したがってもとの解は

$$x(t) = e^{-\gamma t}(at + b) \quad (5.11)$$

これを臨界減衰という. 臨界減衰状態で一番急速に減衰する.

§5.2 指数関数を使った解法

一般に 2 階の線形微分方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

の解は 2 つの指数関数 $e^{\lambda_1 t}$ と $e^{\lambda_2 t}$ の線形和 (定数係数をかけて足したもの)

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

の形で書ける. ここで $\lambda_{1,2}$ は一般に複素数である. 指数関数 $x = ae^{\lambda t}$ は t について微分すると

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (5.12)$$

が成り立つ. $x = e^{\lambda t}$ が式 (5.3)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

を満たすためには λ は 2 次方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (5.13)$$

を満たす必要がある. この 2 次方程式の解は,

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (5.14)$$

第5章 減衰振動

$\gamma > \omega_0$ の場合は λ が実数となり、過減衰を表す。 $\gamma = \omega_0$ の場合は臨界制動を表す。

$\gamma < \omega_0$ の場合が減衰振動の状態に対応し、 $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ を用いると、

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega_1 \quad (5.15)$$

であり、解は

$$x = a_+ e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + a_- e^{-\gamma t - i\omega_1 t} = e^{-\gamma t} (a_+ e^{i\omega_1 t} + a_- e^{-i\omega_1 t}) \quad (5.16)$$

虚数変数の指数関数より

$$x = e^{-\gamma t} ((a_+ + a_-) \cos \omega_1 t + i(a_+ - a_-) \sin \omega_1 t) \quad (5.17)$$

とも書ける。係数 a_+ および a_- は一般に複素数であるが、運動方程式の解を実数とするために $A \equiv a_+ + a_-$ と $B \equiv i(a_+ - a_-)$ が実数になるように選び

$$x = e^{-\gamma t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \quad (5.18)$$

とすれば、これが前節で求めた減衰振動の解 (5.7) を表していることがわかる。

□ 自励振動

粘性定数は通常正で、振動は減衰するが、エネルギーが供給される系では、負になる場合がある。粘性定数が負の場合、振動は増幅する。通常、振幅が無限に増大することはない、ある程度の値に達すると増幅の増大は止まる。その結果、一定の振幅、振動数の振動が維持される。振動が自発的に生じるので自励振動とも呼ばれる。ドアを閉めたときやいすを引いたときに摩擦で音が出たり、バイオリンの弦を弓で一方にこすると音が出るのも自励振動の一種で摩擦振動と呼ばれる。地震もプレート間のすべりによって生じる摩擦振動と解釈することもできる。自励振動は生命現象の中にも遍在する。たとえば心臓の拍動リズムや呼吸のリズムも自励振動の一種である。心臓の心筋細胞を酵素で分離しても各細胞が収縮と弛緩を繰り返しながら拍動する。また、多くの生物は概日(がいじつ)リズム(サーカディアンリズム: circadian rhythm)とよばれる固有のリズムを持っていて、昼夜の明暗のリズムが無くても24時間近くの周期で活動の変化をしめす。ほ乳類では脳内の視交叉上核

§5.2 指数関数を使った解法

(suprachiasmatic nucleus; SCN) と呼ばれる神経核がそのリズムの中樞で、その神経細胞は一つ一つの細胞に分離しても 24 時間近くの周期的活動変化を示すことが知られている。