「基幹物理学ＩA」補足プリント 02（前期月曜１限・大瀧）

2015/04/27

第 3 回

前回の注意点：「ドットは時間微分！」 x での微分ではない！

$$\boxed{(\mathbf{x})' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t) \qquad (\mathbf{v})' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(t)}$$

第 2 章 運動の法則

2.2 ニュートンの 3 法則

第１法則：慣性の法則「物体に力がはたらかないとき、物体は静止したままか、等速直線運動をする」

第２法則：運動の法則「物体に力を加えると、物体にはその力に比例し、質量に反比例する加速度が生じる」 $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$ （$\frac{1}{m}$ は力と加速度の比例定数。逆数 m を**慣性質量**という）

$$\boxed{\therefore m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad \text{（運動方程式）(2.2)(2.3)}}$$

★「第 1 法則は第 2 法則で $F = 0$ とおいたもの」ではない。第 1 法則は第 2 法則より本質的であり、第 2 法則が成立する条件として、座標系に「**慣性系** (inertial frame of reference)」を選ぶ必要があることを示している。慣性の法則は、どのような座標系でも成立するわけではないからだ。例えば電車が発車するとき、床に転がっている空き缶が力を受けていないのに動きだすことがある。慣性の法則が成立するような座標系を慣性系という。

ニュートンは、運動の法則の本質は運動状態の変化であると考え、「運動量が時間と共に変化する割合（変化速度）は、その物体にはたらく力に比例する」と述べた。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ここで運動量 } \mathbf{p} = m\mathbf{v} \text{ である。} \quad \therefore \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.3)'$$

運動方程式の意味としては、このほうが本質的という考え方もある。

慣性質量 m は、物体の「**動かしにくさ**」を表している。一方、物体にはたらく重力、つまり「**重さ**」によって定義される質量を**重力質量** m_G という。

$$m_G g = F_G \quad \therefore m_G = \frac{F_G}{g}$$

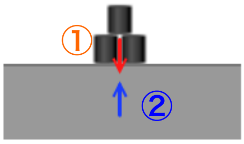
ここで g は重力加速度、F_G は重力である。慣性質量と重力質量は物理的に全く別々の概念であり、一致する必然性はないが、両者は 10^{-9} 以下の精度で一致することが実験的に確かめられている。「より動かしにくい物体がなぜより強く重力に引っ張られるのか？」の答えは現在でもわかっていない。

第３法則：作用・反作用の法則「ある物体 1 が他の物体 2 に力 $\mathbf{F}_{21}$ を及ぼすとき、必ず物体 2 から物体 1 に、同一直線上逆向きの同じ大きさの力 $\mathbf{F}_{12}$ がはたらく」

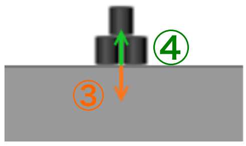
$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ あるいは $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$

★非接触ではたらく力（重力や電磁気力）の場合も成立する。

地面に重りが置かれているとき、

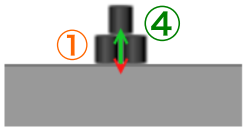


作用１：地球が**重力(万有引力)①**で重りを引く。 **反作用１：**重りが**万有引力②**で地球を引く。作用・反作用の法則から、① ＝ −②

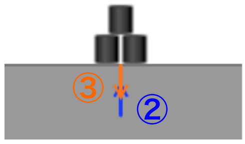


作用２：重りが**地面を押す力③**。 **反作用２：**地面が**重りを押し返す力（垂直抗力）④**。作用・反作用の法則から、③ ＝ −④

力のつりあいは以下の通り。



つりあい１：重りにはたらく**重力①**と**垂直抗力④**がつりあっているので、重りは静止している。① ＝ −④　∴① ＝ ③、および② ＝ ④。



つりあい２：地球（地面）にはたらく、重りが**地面を押す力③**と重りが地球を引く**万有引力②**がつりあっているので、地球は静止している。∴③ ＝ −②

「**力のつりあい**」=<u>1 つの物体にはたらく複数の力</u>についての話。**必ずしも成立しない**。

「**作用・反作用**」=<u>互いに力を及ぼし合う 2 つの物体</u>についての話。**常に成立する**。

★水中に重りが沈んでいくとき、重りは水を押しのけ（上の場合の③に相当）、その反作用としての浮力（上の垂直抗力④に相当）を水から受ける。作用・反作用の法則から、この 2 つの力は大きさが等しく逆向きである。重りの比重が 1 より大きければ、重力①は浮力④より大きいので、つりあい 1 は成立しない（したがって重りは静止しない）。さらに、上記のように重りが水を押す力③の大きさは浮力④に等しく、いっぽう浮力④は重力①したがって重りの万有引力②より小さいので、つりあい 2 も成立しておらず、重りの万有引力に引かれた地球はわずかに重りの方向へ動く。（本当だろうか？）

★よくある間違い：「重りが静止しているのは重力の作用と地面からの反作用がつりあっているから」

→<u>作用と反作用がつりあうと考える点がそもそも間違い</u>。作用と反作用は別の物体にはたらく力なので、それらが直接つりあうことはない。今、つりあっているのは、重りが受ける重力と地面からの垂直抗力であり、垂直抗力は重力の反作用では**ない**。なお、このつりあいは常に成立するわけではない。地面の強度に比べて重りが重すぎれば、重力とつりあうだけの垂直抗力が得られず、重りは地面を破壊して沈み始める。

系全体が静止しているときは、全ての力がそれぞれ別の力とつりあっているので、同じ大きさで同じ向きの力が複数あることが多く、作用・反作用と力のつりあいが混同されやすい。

第 3 章への助走

運動方程式(2.3)は、位置 $\mathbf{r}(t)$の時間 t による微分方程式である。一般に微分方程式の解は関数であり、「微分方程式を解く」ことは、その方程式を満たす関数を求めることで、微分方程式を積分することによって行われる。

「方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解く」　→　代入すればこれを満たすような値 x を探す。

「微分方程式 $\dfrac{d}{dx}f(x)=g(x)$ を解く」　→　x で微分したら $g(x)$になる関数 $f(x)$を探す。

$\dfrac{d}{dx}f(x)$ は $\dfrac{df}{dx}$ とも書く。

例 1）等加速度直線運動

運動方程式　$m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}$　において、質点の運動が x 方向のみ、かつ力が一定ならば、

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F}{m} \tag{2.S1}$$

となり、これは加速度が一定の直線運動である。これを満たすような $x(t)$が時間 t の関数としてわかれば、質点がどのように運動するかは全てわかったと言える。そのような $x(t)$を求めることを「(2.S1)を解く」あるいは「(2.S1)を積分する」という。

加速度が一定の場合、微積分の公式を用いて、まず(2.S1)の両辺を x で 1 回積分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1 \tag{2.S2}$$

となる。C_1 は任意定数（積分定数）であり、これがどんな値であっても(2.S2)は(2.S1)を満たしている。dx/dt は $v(t)$だから、

$$v(t) = \frac{F}{m}t + C_1 \tag{2.S3}$$

と書ける。さらに(2.S2)の両辺をもう一回積分すると、

$$x = x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C_1 t + C_2 \tag{2.S4}$$

となる。C_2 も任意定数である。(2.S4)を(2.S1)の一般解という。C_1 と C_2 は、$t = 0$ における質点の位置と速度（これらを初期条件という）がわかれば決まる。例えば $x(0) = x_0$ 、$v(0) = v_0$ だったとすると、(2.S4)と(2.S3)に $t = 0$ を代入して $x(0) = C_2 = x_0$、$v(0) = C_1 = v_0$ となり、解は

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{2.S5}$$

である。これは、v_0 や x_0 の値が異なっても、t-x 平面上の同じ二次曲線を平行移動したものになる。このことを確かめるには、(2.S5)を因数分解して

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(t^2 + \frac{2mv_0}{F}t\right) + x_0 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(t + \frac{mv_0}{F}\right)^2 - \frac{mv_0^2}{2F} + x_0 \tag{2.S6}$$

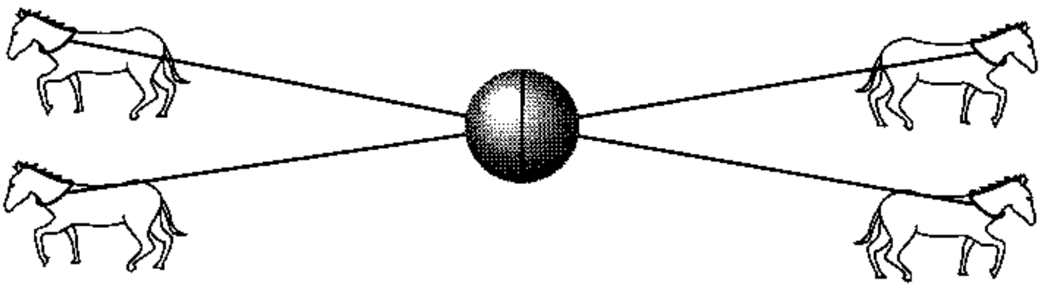
と書き直せば明らかである。

以上。

【本日の小テスト】

1) n 次元ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について、$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = 2(\mathbf{B}\times\mathbf{A})$ が成り立つことを示せ。

2) 下図のように中空の金属球を 2 分したものに取っ手を付け、切断面をよく磨いてゴムのパッキングをつけて張り合わせ内部を真空にすると、取っ手を両側から 1 頭ずつの馬で引いても離れなかった。しかし、2 頭ずつ計 4 頭の馬で引くと離すことができた。これを 2 頭の馬で離す方法を考え、理由を述べよ。



3) このプリントの 2 ページ目にある、水中に沈んでいく重りの万有引力に引かれて地球が（ごくわずかであるが理論的には）動く、というのは本当だろうか。たとえば、重りと地球をまとめて孤立した質点系と考えたとき、質点系の運動の観点から、納得のいく説明ができるか？

3) 下の図のように、杭に結ばれたロープの先に、滑車を経由して重りが吊り下げられている。重りが静止しているとき、重りとロープにかかる力を全て図示し、それぞれについて作用・反作用の関係にある力を示せ。