「基幹物理学ⅠA」補足プリント 06（前期月曜１限・大瀧）

2015/06/01

第７回
【前回の小テストの答え】

1) 質量 $m(t)$についての微分方程式は、$\dfrac{dm}{dt} = \mu$　　(1)

運動量 $p(t)$についての微分方程式（運動方程式）は、$\dfrac{dp}{dt} = F = mg$　　(2)

2) 式(1)を変数分離して両辺積分すると $\int dm = \int \mu dt$　$\therefore m = \mu t + c_1$

初期条件から $t = 0$ で $m = m_0$　$\therefore m_0 = c_1$　$\therefore m = m_0 + \mu t$

これを式(2)に代入すると $\dfrac{dp}{dt} = (m_0 + \mu t)g = m_0 g + \mu g t$

変数分離して両辺積分すると $\int dp = \int (m_0 g + \mu g t)dt$

$\therefore p = m_0 g t + \dfrac{1}{2}\mu g t^2 + c_2$　初期条件より $c_2 = 0$

$\therefore p = mv = m_0 g t + \dfrac{1}{2}\mu g t^2 = (m_0 + \mu t)v$　　$\therefore v = \dfrac{m_0 g t + \frac{1}{2}\mu g t^2}{m_0 + \mu t}$

注意点： $p = mv$ なので、式(2)を $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d\big(m(t)v(t)\big)}{dt} = m(t)\dfrac{dv(t)}{dt}$

としているものがかなりあった。左側の等号は正しいが、m も t の関数なので、勝手に微分の外に出すことはできないから、右側の等号は成立しない。

★左側の等号が正しいとして、さてこれをどう積分するか？ 書き直すと

$\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d\big(m(t)v(t)\big)}{dt} = mg = m(t)g$　となるが、これを不定積分すると $\int dm\, dv = \int mg dt$

となってしまい、左辺の積分は容易ではない。結局、要点は前回の補足プリントに書いたように「**質量が変化する物体の運動方程式は、運動量 *p* についてたてる**」であり、運動量 p について積分することが肝要。

★「速度は質量に依存しない」という考察について。
これは質量 m が一定の場合については正しいが・・・

★δv、δM などの δ は「微少量」を表す記号で、Δ の小文字。「δ と M などの積」ではない。

以上。

【本日の小テスト】

はじめ静止していた質量 m_0 の水滴が、周りの水蒸気を取り込んで単位時間あたり μ の割合で質量を増加しながら重力を受けて落下していく。座標は鉛直下向きを正とする。

1) 質量 $m(t)$についての微分方程式と、運動量 $p(t)$についての微分方程式（運動方程式）を書け。
2) 質量 $m(t)$を t の関数として求め、それを運動量の微分方程式に代入して積分し、落下速度 v を時間 t の式で表せ。