「基幹物理学ＩA」補足プリント 07（前期月曜１限・大瀧）

2015/06/08

第８回

【前回の小テストの答え】

テスト実施時に私が余計なことを言ったこともあり、ある種の出題ミスになりました。まず、動く壁が x 軸に垂直であることが明記されていませんでした。そのうえ・・・

1) 問題文通りに解いた場合：成分に分解する必要があり、私が「ベクトルのままでできる」と言ったのは間違い。

質点の速度が $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ 、動く壁の速度が $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ なので、壁から見た質点の相対速度は $\mathbf{v} - \mathbf{V} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} - V\mathbf{i} = (v_x - V)\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$。壁が x 軸に垂直なら、壁から見て衝突の前後で質点の相対速度の y, z 成分は変化せず、完全弾性衝突なので x 成分は反転する。衝突後の相対速度の x 成分は $-(v_x - V)$ になるので、衝突後の質点の速度を $\mathbf{v}'$ とすると
$\mathbf{v}' = -(v_x - V)\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} + V\mathbf{i} = (-v_x + 2V)\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ 。

［あるいは、衝突後の質点の速度は $\mathbf{v}' = v_x'\mathbf{i} + v_y'\mathbf{j} + v_z'\mathbf{k} = v_x'\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ 、相対速度は

$\mathbf{v}' - \mathbf{V} = v_x'\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} - V\mathbf{i} = (v_x' - V)\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ であり、x 成分について $\dfrac{v_x' - V}{v_x - V} = -1$ が成立。

これを解くと、$v_x' = -\left(v_x - V\right) + V = -v_x + 2V$ が得られる。］

結局、衝突前後の質点の運動量変化は
$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v}' - m\mathbf{v} = m(-v_x + 2V)\mathbf{i} - mv_x\mathbf{i} = m(-2v_x + 2V)\mathbf{i} = -2m(v_x - V)\mathbf{i}$ 。壁が受ける力積は、これと同じ大きさで符号が反対だから、$\mathbf{I} = -\Delta\mathbf{p} = 2m(v_x - V)\mathbf{i}$ 。

2) この問題は教科書 p. 38、第 4 章の章末問題 2 であるが、p. 298 の解答は間違っており、1 次元に限定した場合の解答となっている。この場合は x 軸方向の運動だけを考えているので、「相対速度ベクトル$(\mathbf{v} - \mathbf{V})$が反転する」と考えて良い。

第５章 仕事とエネルギー I

力がする仕事、保存力

5.1 力がする仕事

力 $\mathbf{F}$ によって物体が$\Delta\mathbf{r}$ だけ移動したとき、力がした仕事$\Delta\mathbf{W}$ は $\Delta\mathbf{W} = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$

任意の曲線Γに沿って A から B まで移動したとき、力がした仕事は

$W_\Gamma(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) = \int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$　(5.2)　これは曲線Γに沿った積分で、**線積分**と呼ばれる。

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \Delta\mathbf{r}_i \quad (5.5)$$

【例題 5.1】

力が位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数として $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f\left(\dfrac{z}{a}\mathbf{i} + \dfrac{x}{a}\mathbf{j} + \dfrac{y}{a}\mathbf{k}\right) = f\left(\dfrac{z}{a}, \dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}\right)$ で与えられているとする。物体が経路Γ_1 と経路Γ_2 に沿って移動するときの仕事を求めよ。

Γ_1：A→C では、$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + y\mathbf{j}$　$(0 \le y \le a)$　　$\therefore d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$

$$\therefore \int_A^C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = f\int_0^a \left(\frac{0}{a}\mathbf{i} + \frac{a}{a}\mathbf{j} + \frac{y}{a}\mathbf{k}\right) \bullet (dy\mathbf{j}) = f\int_0^a \left(0 + 1\cdot dy \cdot \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} + 0\right) = f\int_0^a dy = fa$$

C→B では、$x = a - t$ とおいて、$\mathbf{r} = (a - t)\mathbf{i} + a\mathbf{j}$　$(0 \le t \le a)$　　$\therefore d\mathbf{r} = -dt\mathbf{i}$

$$\int_C^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = f\int_0^a \left(\frac{0}{a}\mathbf{i} + \frac{a-t}{a}\mathbf{j} + \frac{a}{a}\mathbf{k} \right) \bullet (-dt\mathbf{i}) = 0$$

$$\therefore \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = fa + 0 = fa$$

Γ_2：経路上の x と y は、パラメータ $\phi\left(0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right)$ を用いて $x = a\cos\phi$ 、 $y = a\sin\phi$ と表せる。

$$\therefore d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}、\ dx = \left(a\cos\phi\right)' d\phi = -a\sin\phi d\phi、\ dy = \left(a\sin\phi\right)' d\phi = a\cos\phi d\phi$$

$$\therefore d\mathbf{r} = a\left(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}\right)d\phi$$

$$\therefore \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = f\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{0}{a}\mathbf{i} + \frac{a\cos\phi}{a}\mathbf{j} + \frac{a\sin\phi}{a}\mathbf{k} \right) \bullet a(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})d\phi$$

$$= f\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j} + \sin\phi\mathbf{k}\right) \bullet a(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})d\phi = fa\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\, d\phi = \frac{fa}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\phi\right)d\phi$$

$$= \frac{fa}{2}\left[\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{fa}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \frac{\pi}{4}fa$$

以上。

【本日の小テスト】

下線部に、等号（＝）あるいは不等号（＜または＞）を記入せよ。

1) 鉄の塊が机の上に置かれている。これを机の上から、机の上に置かれたバケツの中に移した。バケツには水が満たしてある。いま、鉄はバケツの底に静止している。このとき、バケツの底にある鉄の塊がバケツの底から受ける力____鉄の塊が机の上に置かれていたときに机から受けた力、である。
2) 鉄の塊が机の上に置かれている。これを机の上から、机の上に置かれたバケツの中に移した。バケツには水が満たしてある。いま、鉄はバケツの底に静止している。このとき、バケツの底にある鉄の塊が受ける合力____鉄の塊が机の上に置かれていたときに受けた合力、である。
3) 鉄の塊が机の上に置かれている。これにガラスの容器をかぶせ、内部を真空に排気した。このとき、容器の内部にある鉄の塊が机から受ける力____空気中で鉄の塊が机の上に置かれていたときに机から受けた力、である。
4) 鉄の塊がはかりの上に置かれている。鉄とはかりを、水を満たした大きな入れ物の中にそっくり入れる。全部水につかった状態でのはかりの読み____空気中ではかりの上に鉄の塊が置かれていたときのはかりの読み、である。